Contraction en Norme Vectorielle: Convergence d'Iterations Chaotiques pour des Equations Non Linéaires de Point Fixe à Plusieurs Variables

Dedicated to Olga Taussky Todd

F. Robert
Université Scientifique et Médicale de Grenoble
Laboratoire de Mathématiques Appliquées
Tour des Mathématiques. B.P. 53
38041 Grenoble, Cédex, France

Submitted by Richard Varga

ABSTRACT

A survey of results concerning *vectorial norms* is presented, for fixed point problems in several variables. The paper is concerned mainly with the notion of *contraction with respect to a vectorial norm* which ensures convergence of *chaotic iterations*. This result provides a unified approach for convergence of different iterative techniques. By using the notion of *contraction-matrix*, classic results from the linear context can be extended to the nonlinear case.

1. NORMES VECTORIELLES: BIBLIOGRAPHIE COMMENTEE

L'idée d'utiliser une *norme vectorielle* (c'est-à-dire une norme à valeur dans un espace vectoriel ordonné) comme instrument topologique sur un espace vectoriel, semble remonter à Kantorovitch [13] (1950). Dans un contexte d'analyse fonctionnelle appliquée, on trouve cet outil utilisé dans différents ouvrages généraux: Collatz [5], Kantorovitch [13], Krasnoselskii [14], principalement pour des problèmes de points fixes et de convergence de méthodes d'approximations successives, et les applications classiques: équations ou systèmes d'équations, dans $\mathbf{R}^n$, différentielles, intégrales, etc.

Par ailleurs, dans un contexte plus spécialisé d'analyse numérique, différents auteurs ont utilisé, plus ou moins explicitement, des normes vectorielles sur $\mathbf{R}^n$ (et à valeurs dans un $\mathbf{R}^k$, $k \leqslant n$): Feingold et Varga [11], Fiedler et Ptak [12], Ostrowski [18, 19], Schroeder [23], Varga [26]. Dans ces études, principalement matricielles, on se donne une décomposition de $\mathbf{R}^n$ en somme directe de k sous espaces:

$$\mathbf{R}^n = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k,$$

munissant chaque W_i d'une norme φ_i, on pose alors, pour tout x de $\mathbf{R}^n$ décomposé en $x = \sum_i x_i$ $(x_i \in W_i)$:

$$p(x) = [\varphi_1(x_1) \cdots \varphi_k(x_k)]^t.$$

p est une norme vectorielle de taille k sur $\mathbf{R}^n$ qui permet par exemple d'obtenir des propriétés métriques intéressantes pour des matrices (n,n) "décomposées en blocs" (à partir de la décomposition en blocs définie sur $\mathbf{R}^n$).

Ces dernières années enfin, l'étude et l'utilisation, de façon explicite, de normes vectorielles en analyse numérique a donné lieu à un certain nombre de publications: Bode [1], Chambat et Charnay [2, 3], Deutsch [6, 7, 8, 9], Miellou [15, 20, 30], Ortega et Rheinboldt [6], Robert [20, 21, 22, 27], Stoer [24] (voir aussi les références citées dans ces travaux).

L'utilisation de normes vectorielles "de taille infinie" semble être un outil un peu trop général. Par contre, l'utilisation de normes vectorielles de taille finie sur un espace vectoriel de dimension quelconque semble, à l'expérience, être un bon contexte pour les applications que nous avons en vue: il n'y a qu'"un nombre fini de nombres" pour mesurer la distance entre deux éléments de l'espace. Topologiquement, on reste dans le cadre (suffisant!) des espaces normés. Par contre on y gagne par rapport à l'utilisation d'une norme scalaire: on peut d'ailleurs *ajuster* la taille de la norme vectorielle utilisée au problème étudié.

En particulier, pour des problèmes de point fixe, la notion d'opérateur contractant en *norme vectorielle* permet d'obtenir des résultats innaccessibles par l'emploi d'une norme scalaire: on développe dans ce papier, à titre d'exemple, l'étude de la convergence d'itérations *chaotiques* pour des problèmes de point fixe "à plusieurs variables". Pour le détail des démonstrations se reporter à [27].

2. NORME VECTORIELLE CANONIQUE SUR UN PRODUIT D'ESPACES DE BANACH. CONTRACTION

On se donne, pour toute la suite k espaces de Banach X_i, par exemple réels, de norme notée $\|\cdot\|_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$.

On considère le produit topologique $X=\prod_{i=1}^{k}X_i$: tout x de X est un k-uple:

$$x=(x_1,\dots,x_k) \qquad (x_i\in X_i)$$

Alors l'application suivante, de X dans $\mathbf{R}^k$:

$$x=(x_1,\dots,x_k)\in X\to p(x)=(\|x_1\|_1,\dots,\|x_k\|_k)^t$$

est une norme vectorielle (régulière) de taille k sur X [20]: p sera appelée la *norme vectorielle canonique* sur X.

La topologie définie par p sur X est la topologie localement convexe définie par la famille de semi-normes $x\to\|x_i\|_i$. Mais puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de semi-normes pour définir p, cette topologie est équivalente à celle définie par la norme suivante sur X:

$$\varphi(x)=\max_i\|x_i\|_i=[\varphi_\infty\circ p](x)$$

(φ_∞ désignant la norme du max sur $\mathbf{R}^k$). On retrouve donc bien la topologie produit usuelle. Muni de p, X est donc complet.

Exemple de base en dimension finie: L'exemple donné au Sec. 1. Comme cas particulier, on aura à utiliser la *norme vectorielle type* sur $\mathbf{R}^n$

$$x\to|x|,$$

où $|x|$ désigne le vecteur de $\mathbf{R}^n$ obtenu en remplaçant dans x toutes les composantes par leur valeur absolue: c'est une norme vectorielle de taille n sur $\mathbf{R}^n$.

Ce type de normes vectorielles se prête bien à l'étude de la convergence de méthodes itératives par blocs dans $\mathbf{R}^n$ [21]; le cas de la norme vectorielle type redonne l'étude classique des méthodes par point: H-matrices [17] ou "H-fonctions" [16] selon que le problème à résoudre est ou n'est pas linéaire.

Soit alors F un opérateur sur X. Nous détaillons la relation $y=F(x)$ $(x,y\in X)$ en

$$\left.\begin{aligned} y_1&=f_1(x_1,\dots,x_k)\\ &\;\vdots\\ y_k&=f_k(x_1,\dots,x_k)\end{aligned}\right\} \qquad (y_i\in X_i,\quad x_j\in X_j) \tag{1}$$

Definitions. F sera dit *p-lipchitzien* sur X s'il existe une *matrice nonnégative* $M(k,k)$ telle que $\forall x,y$ dans X

$$p(F(x)-F(y))\leqslant Mp(x-y).$$

Une telle matrice est alors appelée *matrice de lipchitz* pour F (elle n'est évidemment pas unique).

Si F est p-lipchitzien sur X et admet une matrice de lipchitz M de *rayon spectral* $\rho(M) < 1$, F sera dit *p-contractant* sur X et M sera appelée *matrice de contraction* pour F (elle n'est pas unique!).

[Pour des raisons de simplicité, nous utilisons une notion de contraction globale (sur tout X). On peut évidemment définir localement la p-contraction.]

Le théorème classique passe sans aucune difficulté dans ce contexte:

THÉORÈME 1 *Si F est p-contractant sur X, de matrice de contraction M, alors*

(1) *F admet un point fixe unique $\xi = F(\xi)$ dans X.*

(2) *Quel que soit x^0 dans X, la méthode des approximations successives*

$$x^{r+1} = F(x^r) \qquad (r = 0, 1, 2, \dots)$$

converge vers ξ.

(3) *On a alors l'estimation suivante, sur l'approximation de ξ par x^r:*

$$p(\xi - x^r) \leqslant M^r (I - M)^{-1} p(x^1 - x^0).$$

RÉMARQUES. Le produit de composition $F_2 \circ F_1$ de deux opérateurs p-lipchitziens F_1, F_2 (de matrices de Lipchitz respectives M_1, M_2) est encore un opérateur p-lipchitzien de matrice de Lipchitz $M_2 M_1$.

Mais le produit $F_2 \circ F_1$ de deux opérateurs p-contractants F_1, F_2 (de matrices de contraction respectives M_1, M_2) *n'est plus nécessairement* (contrairement au cas scalaire) un opérateur p-contractant.

En effet, on peut avoir $\rho(M_2 M_1) \geqslant 1$ avec $\rho(M_1) < 1$, $\rho(M_2) < 1$.

EXEMPLE.

$$M_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \qquad M_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \qquad M_2 M_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Le résultat suivant, qui donne des conditions suffisantes pour qu'un produit de contractions soit une contraction, nous sera utile dans la suite:

THÉORÈME 2. *Soient $H_1, H_2, \dots, H_r, \dots$ une suite d'opérateurs p-lipchitziens sur X de matrices de lipchitz respectives $M_1, M_2, \dots, M_r, \dots$. S'il existe un réel θ $(0 \leqslant \theta < 1)$ et un vecteur $v > 0$ dans $\mathbf{R}^k$ (toutes composantes > 0) tels que*

$$M_r v \leqslant \theta v \qquad (r = 1, 2, \dots)$$

(d'où $\rho(M_r) \leqslant \theta < 1$) alors les opérateurs H_r sont évidemment p contractants de matrices de contractions respectives M_r. Mais de plus les opérateurs Π_r:

$$\Pi_r = H_r \circ \cdots \circ H_2 \circ H_1 \qquad (r = 1, 2, \ldots)$$

sont p-contractants sur X, de matrices de contraction respectives

$$P_r = M_r \cdots M_1 \qquad (r = 1, 2, \ldots).$$

De plus, si tous les H_r admettent le même (unique) point fixe ξ, alors il en est évidemment de même des Π_r. Mais, pour $r \to \infty$, Π_r converge ponctuellement vers l'opérateur constant Π défini par

$$\forall x \in X, \qquad \Pi(x) = \xi$$

et

$$\lim_{r \to \infty} P_r = 0.$$

3. ITERATIONS CHAOTIQUES. DEFINITIONS. MOTIVATIONS

Soit F p-contractant sur X, de matrice de contraction M, et d'unique point fixe ξ dans X. Pour approcher ξ par un procédé itératif, diverses raisons (théoriques et utilitaires) amènent à considérer la classe des *méthodes d'itération chaotiques*:

Soit $K = \{1, 2, \ldots, k\}$ et J une partie (non vide) de K. A partir de F et de J définissons l'opérateur F_J sur X par $y = F_J(x)$ avec

$$\begin{aligned} y_i &= x_i && \text{si } i \notin J, \\ y_i &= f_i(x_1, \ldots, x_k) && \text{si } i \in J. \end{aligned} \tag{2}$$

Evidemment, $F_K = F$. D'autre part, il est clair que, F étant *p-contractant* de matrice de contraction M, F_J est *p-lipchitzien*, de matrice de lipchitz M_J définie par:

$$\begin{aligned} &M_J \text{ a même } i\text{ème ligne que la matrice unité} && \text{si } i \notin J \\ &M_J \text{ a même } i\text{ème ligne que } M && \text{si } i \in J \end{aligned} \tag{3}$$

Bien sûr, $M_K = M$. Mais pour J *strictement inclus* dans K, $\rho(M_J) = 1$, F_J est *alors seulement p-lipchitzien, mais n'est pas p-contractant*: on montre en effet que F_J admet une *infinité* de points fixes, dont évidemment ξ, l'unique point fixe de F.

Une itération chaotique (pour calculer ξ) est alors définie par

(1) un vecteur de départ x^0 dans X

(2) une suite $s=K_1,K_2,\ldots,K_r,\ldots$ de parties non vides de K d'où l'algorithme:

$$x^{r+1}=F_{K_{r+1}}(x^r) \qquad (r=0,1,2,\ldots). \tag{4}$$

A. Trois exemples de base

(1) $K_r=K$ pour tout r. Alors $F_{K_r}=F$ et l'on retrouve la *méthode des approximations successives*:

$$x^{r+1}=F(x^r).$$

(2) $K_r=\{r\}$ (modulo k). On obtient la *méthode non linéaire de Gauss Seidel* [15]. En effet, en regroupant les pas de k en k, il vient, avec des notations évidentes:

$$\begin{aligned}
&\eta_1^{r+1}=f_1(\eta_1^r,\ldots,\eta_k^r),\\
&\ \ddots\\
&\eta_i^{r+1}=f_i(\eta_1^{r+1},\ldots,\eta_{i-1}^{r+1},\eta_i^r,\ldots,\eta_k^r),\\
&\ \ddots\\
&\eta_k^{r+1}=f_k(\eta_1^{r+1},\ldots,\eta_{k-1}^{r+1},\eta_k^r).
\end{aligned} \tag{5}$$

(3) $s=\{\{1\}\{2\},\ldots\{k\}\{k\},\{k-1\},\ldots,\{2\}\{1\},\ldots\}$. On obtient *la méthode non linéaire des "directions alternées"*

B. Motivations de ces iterations chaotiques

Pour résoudre une équation de point fixe à grand nombre de variables:

$$\begin{aligned}
&x_1=f_1(x_1,\ldots,x_k),\\
&\ \ddots\\
&x_k=f_k(x_1,\ldots,x_k),
\end{aligned} \tag{6}$$

le principe de ces méthodes consiste donc en la modification indéfinie des composantes du vecteur itéré par de simples réévaluations de fonctions f_i

(passage de x^r à x^{r+1}):

$$\left.\begin{array}{l} x_i^{r+1} \text{ inchangé si } i \in K_{r+1} \\ x_i^{r+1} = f_i(x_1^r, \ldots, x_k^r) \text{ si } i \in k_{r+1} \end{array}\right\} \qquad (r=0,1,2,\ldots), \tag{7}$$

où K_{r+1} est une partie donnée de $K\{1,2,\ldots k\}$.

En particulier ces méthodes, purement algébriques, n'utilisent pas de dérivée pour F. Elles correspondent à l'idée déjà ancienne (cf. Ostrowski [17] pour des systémes linéaires) d'itérer les composantes d'une équation de point fixe à plusieurs variables dans un ordre arbitraire (technique de "free-steering").

Dans ce qui suit, on tente de faire le point sur les résultats récents acquis dans ce domaine: [4, 10, 27–33]. L'étude de la convergence des procédés d'itérations chaotiques permet d'élaborer, dans un contexte non linéaire, un résultat général [Théorème 3] recouvrant les résultats classiques de convergence des méthodes standard, (1) et réglant celle de méthodes "vraiment chaotiques": Outre l'intéret intrinsèque de la convergence de telles techniques, l'introduction de ces méthodes, qui étendent les méthodes standard, se justifie de deux points de vue complémentaires:

(α) Ces méthodes peuvent être définies en vue de la résolution itérative de (6) sur multiprocesseur: plusieurs unités de calcul, connectées à une même unité de mémoire, travaillent "en simultanéité". La suite chaotique $s=\{S_1,\ldots,S_r,\ldots\}$ utilisée est alors défini en général en cours d'itération par le système informatique lui-même: elle échappe à l'utilisateur, d'où l'intérêt d'un résultat assurant la convergence du procédé "quelle que soit la suite s utilisée".

Dans cette optique, le *modéle itératif utilisé* (7) peut utilement être complété par l'introduction de "retards" ou "d'initialisations multiples" (cf. [29, 30, 32]). A l'origine de ces études, citons pour le cas de systèmes linéaires, les papiers de Chazan-Miranker [4] et Donnelly [10] qui ont donné naissance aux études ultérieures dans un contexte non linéaire.

(β) Si, au contraire, l'utilisateur peut *choisir* la suite chaotique s utilisée (programmation de ces techniques sur monoprocesseur) la question se pose de savoir jouer sur cette possibilité en vue d'améliorer la vitesse de convergence: La question du *choix de stratégies efficaces de balayage des composantes* est alors posée. Sur d'assez gros exemples provenant de la discrétisation de problémes aux limites, on sait bien, expérimentalement parlant, qu'*il peut être plus efficace d'itérer plus souvent sur certaines composantes* (c'est-à dire en certain noeuds de la grille de discrétisation) *qu'en d'autres*. Une étude expérimentale sur terminal graphique [33] a pu obtenir un gain (en

[1] Approximations successives, Gauss-Seidel, relaxation, directions alternées, etc.

nombre de réévalutions successives nécessaires pour obtenir une précision donnée) de l'ordre de 35% par rapport à des stratégies systématiques de balayage des composantes, telle Gauss-Seidel. Ce résultat expérimental confirme l'intérêt pratique de telles techniques chaotiques.

Dans ce qui suit, nous établissons, dans le contexte d'un opérateur F non linéaire, *contractant en norme vectorielle*, un résultat assurant l'existence et l'unicité de la solution ξ de (6), et *la convergence vers ξ de toute itération chaotique de résiduel maximal*. Ce résultat étend naturellement *au cas non linéaire*, par la notion de *matrice de contraction* de F, le résultat classique donné pour le cas linéaire par Ostrowski [17] dans le contexte des H-matrices, et que nous rappelons ici:

Théorème

Soit $Ax = b$ un système linéaire carré dans C^n, où la matrice A est de diagonale D non singulière; soit alors $J = I - D^{-1}A$ la matrice de Jacobi associée à A, d'où l'équation de point fixe suivante dans C^n, équivalente au système linéaire donné:

$$x = Jx + D^{-1}b = F(n).$$

Si A est une H-matrice [2] alors toute itération chaotique conduite sur F, partant de x^0 quelconque dans C^n, n'abandonnant jamais définitivement une seule des composantes du vecteur itéré, converge vers la solution unique ξ.

4. ITERATIONS CHAOTIQUES CONVERGENCE.

Soit donc F un opérateur p-contractant sur X, de matrice de contraction M, et ξ l'unique point fixe de F dans X.

Soit aussi $s = \{K_1, K_2, \ldots, K_r, \ldots\}$ une suite de parties de $K = \{1, 2, \ldots, k\}$ définissant, à partir de $x^0 \in X$, une itération chaotique pour calculer ξ.

On appelle *résiduel $\mathcal{R}(s)$ de s* la partie de $K = \{1, 2, \ldots, k\}$ formée par les indices "apparaissant une infinité de fois dans s". Précisément:

$$\mathcal{R}(s) = \{i \in \{1, 2, \ldots, k\} : \forall n \in \mathbf{N}, \exists m \geqslant n : i \in K_m\}.$$

et s sera dite de *résiduel maximal* si $\mathcal{R}(s) = K$, c'est-à-dire si, dans s, chaque entier de 1 à k "apparait une infinité de fois".

Théorème 3. *Si F est p-contractant sur X, alors, toute itération chaotique définie par une suite s de résiduel maximal converge, quel que soit x^0, vers l'unique point fixe ξ de F dans X.*

[2] On rappelle que A est dite H-matrice si, sa diagonale D étant non singulière, la matrice de Jacobi J est telle que le rayon spectral $\rho(|J|)$ est inférieur à 1. ($|J|$ désigne la matrice dont les éléments sont les modules des éléments de J). Formulation équivalente: A est une H-matrice si la matrice $N(A) = |D|(I - |J|)$ est une M-matrice.

L'idée de la démonstration (cf. [27]) est la suivante:

(a) La suite s étant de résiduel maximal, on peut toujours, indéfiniment, regrouper les opérateurs F_{K_r} de la façon suivante:

$$H_1 = F_{K_{r_1}} \circ \cdots \circ F_{K_1} \quad \text{de façon que} \quad K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_{r_1} = K,$$

$$H_2 = F_{K_{r_2}} \circ \cdots \circ F_{K_{r_1+1}} \quad \text{de façon que} \quad K_{r_1+1} \cup \cdots \cup K_{r_2} = K,$$

(b) On forme ainsi une suite d'opérateurs $H_1, H_2, \ldots, H_s, \ldots$ *a priori* p-lipchitziens. (H_1, par exemple, admet la matrice $P = M_{K_{r_1}} \cdots M_{K_1}$ pour matrice de lipchitz, M étant une matrice de contraction pour F.)

(c) Puisque $\rho(M) < 1$, il existe un réel θ $(0 \leqslant \theta < 1)$ et un vecteur $v > 0$ dans $\mathbf{R}^k$ tel que:

$$Mv \leqslant \theta v.$$

(d) On montre alors (de façon très technique) que l'on a:

$$P_r v \leqslant \theta v \qquad (r = 1, 2, \cdots),$$

P_r étant la matrice de lipchitz exhibée pour H_r.

(e) D'où résulte par conséquent qu'*en regroupant les opérateurs F_{K_r} comme indiqué, on construit une suite d'opèrateurs H_r p-contractants, et vérifiant en fait toutes les hypothèses du Théorème 2.*

(f) D'où résulte, par ce théorème, que la suite dans X définie par:

$$y^0 = x^0, \quad y^1 = H_1(x^0), \quad \cdots, \quad y^{r+1} = H_{r+1}(y^r), \quad \cdots$$

converge vers l'unique point fixe ξ de F dans X.

(g) Or cette suite est elle-même une sous-suite de la suite chaotique

$$x^{r+1} = F_{K_{r+1}}(x^r) \qquad (r = 1, 2, \cdots)$$

dont on montre (technique) qu'elle converge aussi vers ξ.

Commentaires. *On voit donc ce qui fait la convergence d'une itération chaotique* de résiduel maximal, pour F p-contractant: Dans une telle itération, en regroupant les pas, *chaque fois que toutes les composantes ont été "activées", un "pas de contraction" est acquis. Et le fait d'enchaîner, même de façon chaotique, de tels pas contractants, assure la convergence.*

5. EXEMPLES D'ILLUSTRATION DU THEOREME DE CONVERGENCE.

A. *Contexte General*

Les approximations successives sur F, la méthode non linéaire de Gauss-Seidel, correspondent évidemment à des suites chaotiques de résiduel maximal: on est donc assurè de leur convergence vers l'unique point fixe ξ de F. En particulier pour la méthode de Gauss-Seidel, on peut introduire *l' opérateur de Gauss-Seidel* G *associé* à F, défini par ses composantes g_i:

$$\begin{aligned} g_1(x) &= g_1(x_1,\ldots,x_k) = f_1(x_1,\ldots,x_k), \\ g_2(x) &= g_2(x_1,\ldots,x_k) = f_2(g_1(x),x_2,\ldots,x_k), \\ &\vdots \\ g_k(x) &= g_k(x_1,\ldots,x_k) = f_k(g_1(x),\ldots,g_{k-1}(x),x_k). \end{aligned} \tag{8}$$

La méthode non linéaire de Gauss-Seidel conduite sur F (5) n'est alors pas autre chose que la méthode des approximations successives conduite sur $\tilde{G}$. Mais il est clair que $G = F_{\{k\}},\ldots,F_{\{1\}}$, d'où l'on déduit que $\tilde{M} = M_{\{k\}},\ldots,M_{\{1\}}$ est une matrice de lipchitz pour G, *qui en fait est une matrice de contraction* puisque tous les indices de 1 à k ont été pris en compte. Or si l'on décompose la matrice M de contraction de F en

$$M = \boxed{\begin{array}{cc} - & \underline{U} \\ \overline{L} & - \end{array}} = L + U$$

il est facile de vérifier que $\tilde{M} = (I-L)^{-1}U$. Dans cet exemple, le théorème classique de Stein Rosenberg [24] redonne le résultat puisqu'il donne directement l'inégalité:

$$\rho(\tilde{M}) \leqslant \rho(M) < 1.$$

Autrement dit: *la matrice de Gauss-Seidel* $\tilde{M}$ *de la matrice de contraction* M *de l'opérateur* F *est matrice de contraction de l'opérateur* G *de Gauss-Seidel attaché à* F [3].

On voit ainsi comment, par l'intermédiaire des matrices de contraction, passent dans le contexte non linéaire certains résultats classiques du contexte linéaire.

B. *Equations Non Lineaires Dans* $\mathbf{R}^n$

En munissant $\mathbf{R}^n$ de la norme vectorielle type (cf. Sec. 2), on retrouve des résultats de convergence donnés dans [16] pour les méthodes non linéaires de base: Jacobi, Gauss-Seidel (voir Sec. 8 ci-dessous pour l'introduction d'un paramètre de relaxation). En utilisant une norme vectorielle "par blocs" (cf. Sec. 2) on peut formuler le même type de résultats pour des méthodes non linéaires par blocs.

C. *Resolution Iterative de Systemes Lineaires*

En munissant $\mathbf{R}^n$ de la norme vectorielle type, on retrouve l'énoncé du résultat d'Ostrowski rappelé au Sec. 3. En effet, dire *qu'une matrice est une H-matrice, c'est dire que sa diagonale est non singulière et que la matrice de Jocobi J associée est contractante en norme vectorielle-type:*

$$\rho(|J|) < 1. \tag{9}$$

Le résultat principal de Chazan-Miranker [4] concernant la convergence, pour des problèmes de point fixe linéaires, d'itèrations chaotiques (avec termes de retard et paramètre de relaxation) utilise d'ailleurs implicitement une condition de contraction en norme vectorielle type sur $\mathbf{R}^n$, explicitée par (9).

En utilisant sur $\mathbf{R}^n$ une norme vectorielle par blocs (cf. Sec. 2) on peut énoncer le même résultat pour des blocs-H-matrices [19] et des méthodes itératives chaotiques par blocs.

Le théorème principal de convergence (Théorème 3) recouvre donc une large classe de résultats connus qui reposent tous en fait sur la notion de contraction en norme vectorielle. Il permet par ailleurs d'envisager des techniques de balayage des composantes moins élémentaires, et la recherche de stratégies efficaces de balayage.

6. CONTROLE DE LA CONVERGENCE D'UNE ITERATION CHAOTIQUE[3]

Nous allons proposer, sous les hypothèses du Théorème 3, un procédé algorithmique de controle de la convergence l'une itération chaotique: ce procédé, appelé *itération secondaire*, sera simplement *"l'image" dans* $\mathbf{R}^k$; de l'itération chaotique considérée, appelée *itération principale.*

Rappelons le formalisme: F étant p-contractant sur X y admet un point fixe unique ξ, vers lequel converge l'itération chaotique

$$x^{r+1} = F_{K_{r+1}}(x^r) \qquad (r = 0, 1, \dots),$$

de résiduel maximal, partant de x^0 quelconque dans X. M_{K_r} désigne la matrice de lipchitz de l'opérateur F_{K_r}, construite à partir de la matrice de contraction M considérée pour F, et de la partie K_r de $K = \{1, 2, \dots, k\}$.

[3]Cf.[21, 27, 29-32].

Supposons avoir obtenu (et c'est facile de l'obtenir par résolution d'un système linéaire (k,k); cf. [21]), au $r_1^{\text{ème}}$ pas de l'itération principale, un vecteur z_{r_1} de $\mathbf{R}^k$, tel que:

$$p(\xi - x^{r_1}) \leqslant z_{r_1}.$$

Définissons alors, à partir du pas r_1, l'itération secondaire dans $\mathbf{R}^k$, par:

$$z_{r+1} = M_{K_{r+1}} z_r \qquad (r = r_1, r_{1+1}, \dots).$$

Définissons alors, à partir du pas r_1, l'itération secondaire dans $\mathbf{R}^k$, par:

$$z_{r+1} = M_{K_{r+1}} z_r \qquad (r = rd1, r_{1+1}, \dots).$$

Proposition .
On a alors, $\forall r \geqslant r_1$, *l'estimation suivante en norme vectorielle:*

$$p(\xi - x^r) \leqslant z_r.$$

Ce résultat s'établit aisément par récurrence:

$$p(\xi - x^{r+1}) = p\left(F_{K_{r+1}}(\xi) - F_{K_{r+1}}(x^r)\right) \leqslant M_{K_{r+1}} p(\xi - x^r) \leqslant M_{K_{r+1}} z_r = z_{r+1}.$$

Rémarques.

(1) Considérons dans $\mathbf{R}^k$ l'équation de point fixe $z = Mz$. Puisque $\rho(M) < 1$, la seule solution est $z = 0$. D'autre part, M étant à éléments $\geqslant 0$ est, relativement à la norme vectorielle type sur $\mathbf{R}^k$, sa propre matrice de contraction:

$$|Mu - Mv| = |M(u-v)| \leqslant |M|\,|u-v| = M|u-v| \qquad (M \geqslant 0; \rho(M) < 1).$$

Il en résulte que *l'itération secondaire considérée n'est pas autre chose qu'une itération chaotique dans* $\mathbf{R}^k$, partant de z_{r_1}, et définie à partir de l'opérateur linéaire M sur $\mathbf{R}^k$. La suite s définissant cette itération chaotique dans $\mathbf{R}^k$ est évidemment la même que celle définissant l'itération principale. *Les hypothèses du Théorème 3 étant vérifiées, on conclut donc simplement à la convergence de la suite* z_r *vers 0, unique point fixe de l'opérateur* M *dans* $\mathbf{R}^k$. *Ainsi l'estimation donnée par l'itération secondaire est elle réaliste, car elle tend vers 0 lorsque* r *tend vers l'infini.*

(2) Cette itération secondaire n'est d'ailleurs que l'adaptation à ce contexte d'itérations chaotiques, d'un algorithme présenté par Schroeder [23] (et utilisant implicitement la norme vectorielle type sur $\mathbf{R}^n$) pour le controle de la convergence d'une méthode itérative de résolution de système linéaire dans $\mathbf{R}^n$.

(3) Lorsque l'itération chaotique considérée se réduit à la méthode des approximations successives ($K_r = K$; cf. Sec. 3), l'estimation donnée par

l'itération secondaire se ramène à l'estimation classique (cf. Théorème 1, Sec. 2).

$$p(\xi - x^r) \leqslant M^r(I-M)^{-1}p(x^1 - x^0) = z_r \qquad (r=0,1,\cdots)$$

avec, ici:

$$r_1 = 1, \qquad z_{r_1} = M(I-M)^{-1}p(x^1 - x^0)$$

et:

$$z_{r+1} = Mz_r \qquad (r \geqslant 1) \qquad \text{(itération secondaire).}$$

7. CAS D'UN RESIDUEL NON MAXIMAL[4]

Soit toujours F p-contractant sur X; si, partant de x^0 dans x, on itère chaotiquement:

$$x^{r+1} = F_{K_{r+1}}(x^r) \qquad (r=0,1,\cdots)$$

à partir d'une suite $s = \{K_1, K_2, \ldots, K_r, \cdots\}$ de résiduel $\mathcal{R}\ (s)$ *non maximal* on peut prouver (cf. [27]):

(1) qu'il y a encore convergence de la suite (x^r) vers une limite η;

(2) que cette limite η est un *point fixe partiel de F, en ce sens que seules seront vérifiées les équations*:

$$\eta_i = f_i(\eta_1, \ldots, \eta_k)$$

pour i appartenant à $\mathcal{R}\ (s)$.

On comprend en effet ce qui se passe: le résiduel n'étant pas maximal, certaines composantes ne seront modifiées qu'un nombre fini de fois par l'itération: *autrement dit, au bout d'un nombre fini de pas, ces composantes seront définitivement fixées.* On ramène alors le problème à celui d'une itération chaotique de *résiduel maximal* opérant dans un sous-espace de X. On montre que l'opérateur correspondant est alors contractant relativement à la norme vectorielle induite sur le sous-espace, ce qui permet de conclure.

Ce résultat de convergence vers un point fixe partiel de F montre que, dans une itération chaotique, il est *mauvais de négliger trop longtemps certaines composantes*: car on comprend qu'alors "l'itération s'oriente vers un point fixe partiel de l'opérateur". *Si l'on poursuit trop longtemps dans cette voie, le processus semblera converger*, puis, lorsqu'on reprendra en compte des composantes trop longtemps négligées, on verra des variations brutales se produire, correspondant à un "changement de cap" de l'itération. L'expérimentation numérique confirme tout à fait ce phénomène [27, 33].

Tout le problème (et il est ouvert, cf. Sec. 3 et Sec. 9 conclusion) consiste à savoir trouver une stratégie efficace de balayage des composantes: *c'est-à-dire à savoir doser l'intérêt porté à chaque composante*: le choix d'une telle

---

[4]Cf. [27].

stratégie dépend évidemment de l'opérateur F considéré, et particulièrement de l'examen approfondi de la matrice de contraction utilisée pour F.

8. PERFECTIONNEMENTS POSSIBLES

A. *Contraction Locale*

Pour des raisons de simplicité, cette étude est présentée sous l'hypothèse de contraction globale de F (c'est-à-dire sur tout X). On peut évidemment, avec une machinerie plus sophistiquée, atteindre des phénomènes de contraction locale en norme vectorielle [2].

B. *Introduction d'un Parametre de Relaxation*

Dans un but d'accélération des méthodes numériques, on peut, classiquement, remplacer l'équation de point fixe:

$$x = F(x)$$

par l'équation équivalente suivante, où ω (réel $\neq 0$) est un paramètre de relaxation:

$$x = \omega F(x) + (1-\omega)x$$

que nous écrirons

$$x = F_\omega(x)$$

après avoir posé

$$F_\omega(x) = \omega F(x) + (1-\omega)x.$$

PROPOSITION (cf. [3, 19]). *Soit F un opérateur p-contractant sur X, et M une matrice de contraction de F. Alors pour tout ω tel que*:

$$0 < \omega < \frac{2}{1+\rho(M)}$$

l'opérateur F_ω est p-contractant sur X, car sa matrice de Lipchitz

$$M_\omega = \omega M + |1-\omega| I$$

est alors de rayon spectral < 1.

En particulier, la méthode de Gauss-Seidel conduite sur F_ω redonne, dans le cas matriciel classique, la méthode usuelle dite de relaxation (SOR), qui se trouve donc placée ici dans un contexte plus général d'opérateurs non linéaires contractants sur un produit d'espaces de Banach.

9. CONCLUSION

Quelques points:

Un contexte naturel d'étude des méthodes (purement algébriques: sans utilisation de dérivées partielles) d'itérations chaotiques (pour la résolution d'équations de point fixe à plusieurs variables) est celui d'un produit d' espaces de Banach, muni de la norme vectorielle canonique: ce contexte permet en particulier de traiter dans un même formalisme les méthodes par point et les méthodes par blocs.

La notion d'opérateur contractant en norme vectorielle est alors "une bonne notion": elle assure à la fois l'existence et l'unicité d'un point fixe pour l'opérateur considéré, et la convergence vers ce point fixe de toute itération chaotique de résiduel maximal (Théorème 3).

Ce résultat est suffisamment général pour recouvrir en particulier (en les étendant au contexte non linéaire) les résultats usuels de convergence des méthodes itératives classiques par point ou par blocs de résolution des systèmes linéaires (H ou bloc-H-matrices).

C'est d'ailleurs par l'intermédiare des matrices de contraction, ou de Lipchitz, des différents opérateurs considérés que passent dans le cadre non linéaire les résultats classiques du cas linéaire.

Dans le contexte délimité ci-dessus, on peut controler algorithmiquement la convergence d'une itération chaotique: l'algorithme (secondaire) de controle n'est pas autre chose que la conduite de l'itération chaotique qur les matrices de lipchitz des opérateurs intervenant dans l'itération principale.

La suite de cette étude se situe au niveau du *choix* et de la *justification* des critères efficaces (sous le rapport du temps de calcul) pour la construction de l'itération chaotique par l'intermédiaire de la suite s. C'est un problème qui semble d'assez longue haleine. Jusqu'à présent l'attaque théorique pourtant assidue de cette question, n'a rien donné, et il faudra probablement accumuler pas mal d'expérimentation numérique (cf. [33]) pour commencer ` y voir un peu clair: c'est un exemple (de plus) où l'utilisation de techniques de visualisation doit permettre "d'aller plus loin", dans des questions de calcul.

BIBLIOGRAPHIE

1 A. Bode, Matricielle untere Schranken linearer Albidungen und M-matrizen, *Num. Math.* **11** (1968), 405–412.

2 M. Chambat et M. Charnay, Algorithmes non linéaires pour la résolution locale d'une équation de point fixe, *C. R. Acad. Sci.* (série A) **276** (1973), 301–304.

3 M. Chambat et M. Charnay, Résolution d'équations non linéaires de point fixe dans $\mathbf{R}^n$, Revue d'Automatique, Informatique et Recherche Operationnelle (France), dec. 1972, R3, p. 105–109.

4 D. Chazan et W. Miranker, Chaotic relaxation, *Linear Algebra Appl.* **2** (1969), 199–222.
5 L. Collatz, *Funktional Analysis und Numerische Mathematik*, Springer, Berlin, 1964.
6 E. Deutsch, Matricial norms, *Num. Math.* **16** (1970), 73–84.
7 E. Deutsch, On matricial norms subordinate to vectorial norms, *Math. Z.* **122** (1971), 142–150.
8 E. Deutsch, On vectorial norms and pseudonorms, *Proc. An. Math. Soc.* **28** (1971), 18–24.
9 E. Deutsch, Matricial norms and the zeros of lacunary polynomials, *Linear Algebra Appl.* **6** (1973), 143–148.
10 J. D. P. Donnelly, Periodic chaotic relaxation, *Linear Algebra Appl.* **4** (1971), 117–128.
11 D. Feingold et R. S. Varga, Block diagonally dominant matrices and generalization of the Gershgorin circle theorem, *Pac. J. Math.* **12** (4) (1962), 1241–1249.
12 M. Fiedler et V. Ptak, Generalized norms of matrices and the location of the spectrum, *Czech. Math. J.* **12** (1962), 87, 558–571.
13 L. V. Kantorovitch, B. Z. Vulich, et A. G. Pinsker, *Analyse fonctionnelle dans les espaces ordonnés* (en russe), Moscou, 1950.
14 M.A. Krasnosel'skii, *Approximate solution of operator equations*, Walters Nordhoff, Groningen, 1972.
15 J. C. Miellou, *C. R. Acad. Sci.* **273** (1972), 1257–1260; **275** (1972), 1107–1110.
16 J. Ortega et W. C. Rheinboldt, *Iterative solution of nonlinear equations in several variables*. Academic, New York, 1970.
17 A. Ostrowski, Determinauten mit Überwiegender Hauptdiagonale und die absolute Konvergenz von linearen iteration progressen, *Comment. Math. Helv.* **30** (1955), 175–210.
18 A. Ostrowski, Metrical properties of operator matrices and matrices partitioned into blocks, *J. Math. Anal. Appl.* **2** (1961), 161–209.
19 A. Ostrowski, Iterative solution of linear systems of functional equations, *J. Math. Anal. Appl.* **2** (1961), 351–369.
20 F. Robert, Thèse, Grenoble (1968) et cours de Diplome d'E'tudes Approfondies (1973).
21 F. Robert, Bloc H-matrices et convergence des méthodes itératives classiques par blocs, *Linear Algebra Appl.* **2** (1969), 223–265.
22 F. Robert et M. Rascle, Contraction faible en norme vectorielle, *Linear Algebra Appl.* **6** (1973), 305–335.
23 J. Shroeder, Computing error bounds in solving linear systems, MRC Tech. Report 242, University of Wisconsin, Madison, Wisc. (1961).
24 J. Stoer, Lower bounds of matrices, *Num. Math.* **12** (1968), 146–158.
25 R. S. Varga, *Matrix iterative analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1962.
26 R. S. Varga, Minimal Gershgorin sets for partitioned matrices, *SIAM J. Num. Anal.* **7** (4) (1970), 493–507.

Résultats récents sur les itérations chaotiques (voir aussi [4] et [10]):

27 F. Robert, M. Charnay, et F. Musy, Itérations chaotiques série-parallèle pour des équations non linéaires de point fixe, *Aplicace matematicky* **20** (1975), 1–38 (Prague).

28 F. Musy et M. Charnay, Sur le théorème de Stein Rosenberg, *RAIRO Revue Rouge, AFCET* 8° Année, Aout 1974, R2, p. 95–107.

29 J. C. Miellou, Algorithmes de relaxation chaotiques à retards, *RAIRO Revue Rouge, AFCET* (à paraître).

30 J. C. Miellou, *C.R.Acad. Sci.* (à paraître).

31 N. X. Luong, Algorithmes de relaxation conduits par l'algorithme secondaire Thése 3° cycle, Besancon (1975).

32 M. Charnay, Itérations chaotiques sur un produit d'espaces métriques, Thèse Troisième cycle, Lyon (1975).

33 Z. Mahjoub et A. Vaissière, Experimentation numérique d'itérations chaotiques sur écran de visualisation, Projet élève Ingénieur, Grenoble (1974).

Received 17 June 1974